Μαθημα 9ο

ΑΕΣΔΕ

3/12/2018

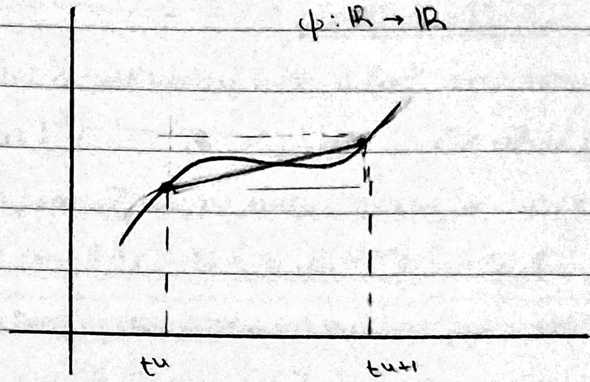
Κεφαλαιο 3ο : Μεθοδοι Runge-Kutta (1903)

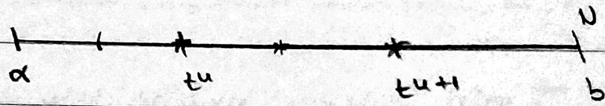
ΠΑΤ: (1) $\begin{cases} y' = f(t,y) , & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

$\downarrow$ Euler (ομοιομ. διαμερ.)

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(\tau)\, d\tau = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\tau, y(\tau))\, d\tau$$

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$





Εχω καλυτερη ακριβεια με μικροτερες διαμερισεις αλλα θα εχω περισσοτερες πραξεις γιατι θα αυξηθουν οι συναρτησιακοι υπολογισμοι. Αρχη μεθοδου

Εξωτερικη διαμερισης: t^n

Εσωτερικη διαμερισης: τ^i

$$\int_0^{\tau_i} \varphi(s)\, ds \simeq \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, \varphi(\tau_j)$$

$$\int_0^1 \varphi(s)\, ds = \sum_{i=1}^{q} b_i\, \varphi(\tau_i) \quad , q \in \mathbb{N} , b_i \in \mathbb{R}$$

- τ_i κομβοι της εσωτερικης διαμερισης

a_{ij} βαρη (συντελεστης) του ολοκληρωματος $[0, \tau_i]$

b_i βαρη (συντελεστης) του ολοκληρωματος $[0,1]$

$$\int_0^{\tau_1} \varphi(s)\, ds = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, \varphi(\tau_j) = \overset{\neq 0}{a_{11}}\, \varphi(\tau_1) + \overset{=0}{a_{12}}\, \cancel{\varphi(\tau_2)} + \overset{=0}{\cancel{a_{13}}}\, \varphi(\tau_3) = a_{11}\, \varphi(\tau_1)$$

$$\int_0^{\tau_2} \varphi(s)\, ds = \overset{\neq 0}{a_{21}}\, \varphi(\tau_1) + \overset{\neq 0}{a_{22}}\, \varphi(\tau_2) + \overset{=0}{\cancel{a_{23}\, \varphi(\tau_3)}} = a_{21}\, \varphi(\tau_1) + a_{22}\, \varphi(\tau_2)$$

$$\int_0^{\tau_3} \psi(s)\,ds = \overset{\neq 0}{a_{31}}\,\psi(\tau_1) + \overset{\neq 0}{a_{32}}\,\psi(\tau_2) + \overset{\neq 0}{a_{33}}\,\psi(\tau_3)$$

▶ $\displaystyle\int_0^1 \psi(s)\,ds = \sum_{i=1}^{3} b_i\,\psi(\tau_i) = \overset{\neq 0}{b_1}\,\psi(\tau_1) + \overset{\neq 0}{b_2}\,\psi(\tau_2) + \overset{\neq 0}{b_3}\,\psi(\tau_3)$

$0\,\psi(\tau_1) + 0\,\psi(\tau_2) + \overset{=h}{b_3}\,\psi(\tau_3) = ?$ Πεπλεγμένη Euler

$\underset{h}{\underset{\shortparallel}{b_1}}\,\psi(\tau_1) + 0\,\psi(\tau_2) + 0\,\psi(\tau_3)$ άμεση Euler

Πίνακας A			Διαμερίσεις
a_{11}	a_{12} ...	a_{1q}	τ_1
a_{21}	a_{22} ...	a_{2q}	τ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{q1}	a_{q2}	a_{qq}	τ_q
b_1	b_2	. b_q	

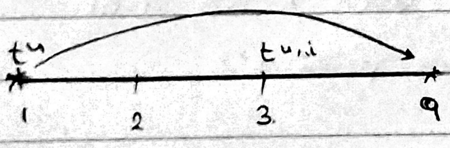
Συντελεστές

Μορφή Μητρώου

$$= \begin{array}{c|c} A & \tau \\ \hline b^T & \end{array}, \quad A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^q, \quad b = (b_1, \dots, b_q)^T, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_q)^T$$

▶ $t^n = \overset{a}{\overset{\shortparallel}{t^0}} + nh$, $n = 0, 1, \dots, N$ $\to y^1, y^2, \dots, y^n, \dots, y^N$ Εξωτερική Διαμ.

$t^{n,i} = t^n + \tau^i h$, $i = 1, 2, \dots, q$ $\to y^{n,i}$ Εσωτερική Διαμ.



$(N-1) \times q$: RK

$(N-1)$: Euler

Ολοκληρώνω από t^n μέχρι $t^{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, q$

$$\int_{t^n}^{t^{n,i}} y'(s)\,ds = y(t^{n,i}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^n + \tau^i h} f(\tau, y(\tau))\,d\tau \quad \overset{\text{αλλαγή}}{\Longrightarrow} \text{μεταβ.}$$

$$\Rightarrow y(t^{n,i}) = y(t^n) + h \int_0^{\tau^i} f(\underbrace{t^n + hs}_{t^{n,i}}, y(\underbrace{t^n + hs}_{t^{n,i}}))\,ds$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t^{n,i}) = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij}\, f(t^{n,j}, y(t^{n,j}))}$$ Βρίσκω τα εσωτερικά σημεία

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(s)ds = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau \Rightarrow$$

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\int_0^1 f(t^n + hs, y(t^n+hs))ds \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y(t^{n,i}))}$$

$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{i=1}^{q} b_i f(t^{n,i}, y(t^{n,i})) \quad , n=0,1,\dots,N-1$$

$$\begin{cases} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ y^{n,3} = y^n + h a_{31} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h a_{32} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \\ \vdots \\ y^{n,q} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{qj} f(t^{n,i}, y^{n,i}) \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & & 0 \\ \vdots & & & 0 \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{qq-1} & 0 \end{pmatrix}$$

→ Αυστηρά κάτω τριγωνικός
Τότε αυτή η RK είναι άμεση μέθοδος

Παρατήρηση

Αν τα $a_{ij} \neq 0$ στον πίνακα A (των συντελεστών) τότε παίρνουμε μια πεπλεγμένη RK μέθοδο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ Είναι η άμεση Euler

Έχω $q=1$ ενδιάμεσο στάδια , $t^{n,1} = t^n + \tau_1 h = t^n$

$y^{n,1} = y^n$

$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n,1}, y^{n,1}) = y^n + h f(t^n, y^n)$

2) $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$

Έχουμε $q=1$ ενδιάμεσο στάδιο

$y^{n,1} = y^n + h\, a_{11} f(t^{n,1}, y^{n,1}) = y^n + h f(t^{n,1}, y^{n,1})$

$t^{n,1} = t^n + 1\cdot h = t^{n+1}$

$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n,1})$

άρα $y^{n,1} = y^{n+1}$

$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$ Πεπλεγμένη Euler

3) $\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$

Έχω $q=2$ ενδιάμεσα στάδια

$$\left.\begin{array}{l} y^{n,1} = y^n \\ y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2}\left(f(\cancelto{t^n}{t^{n,1}}, \cancelto{y^n}{y^{n,1}}) + f(\cancelto{t^{n+1}}{t^{n,2}}, y^{n,2})\right) \\ y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(\cancelto{t^n}{t^{n,1}}, \cancelto{y^n}{y^{n,1}}) + f(\cancelto{t^{n+1}}{t^{n,2}}, \cancelto{y^{n+1}}{y^{n,2}})\right) \end{array}\right\} \quad y^{n+1} = y^{n,2}$$

Έχω τη μέθοδο του τραπεζίου

4) R-K 4 $\boxed{\text{ΘΕΜΑ}}$

Στο matlab την καλω με ode45

0	0	0	0	0
1/2	0	0	0	1/2
0	1/2	0	0	1/2
0	0	1	0	1
1/6	1/3	1/3	1/6	

Εχουμε $q = 4$ ενδιαμεσα βηματα.
Αυστηρα κατω τριγωνικος αρα ρητη μεθοδος και ακριβεια αυτη ειναι 4ης ταξης

για $h = 0.1 \longrightarrow h^4 = 0.0001$

$$y^{n,1} = y^n \quad , \quad t^{n,1} = t^n + 0h = t^n$$
$$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \quad , \quad t^{n,2} = t^n + h/2$$
$$y^{n,3} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \quad , \quad t^{n,3} = t^n + h/2$$
$$y^{n,4} = y^n + h f(t^{n,3}, y^{n,3}) \quad , \quad t^{n,4} = t^n + 1 \cdot h = t^{n+1}$$

$$y^{n+1} = y^n + h \left[\frac{1}{6} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{1}{3} f(t^{n,2}, y^{n,2}) + \frac{1}{3} f(t^{n,3}, y^{n,3}) + \frac{1}{6} f(t^{n,4}, y^{n,4}) \right]$$

Εχω σφαλμα $+ O(h^5)$

▸ Matlab : ode45 για RK4
Mathematica : NDSolve [ ]